Colles de Maths - semaine 11
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables
- Formules de Leibniz
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Caractérisations des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables

Révision d'analyse asymptotique

Exercice 1

1. Montrer que l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions strictement positives notées u_n et v_n (avec $u_n < v_n$) pour n assez grand.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Trouver sa limite l.
3. Montrer que $u_n - l \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2

1. (*Théorème de Cesàro*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Monter que $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k \to l$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^\alpha}$. Étudier la suite (u_n) et donner un équivalent de u_n.
   Indication : On pourra considérer $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

1. (*Théorème de Cesàro*) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Monter que $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k \to l$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-u_{n+1}} \leq u_{n+1} - u_n \leq e^{-u_n}.$$
   Étudier (u_n) et montrer que $u_n = \ln n + o(1)$.

Dérivabilité

Exercice 4 Soit $a \geq 0$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_a(x) = |x|^a \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer à quelle condition sur a la fonction f_a se prolonge en une fonction continue g_a sur $\mathbb{R}$. On se place dans ce cadre dans la suite.
2. Déterminer à quelle condition sur a la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Même question avec $\mathcal{C}^1$, et deux fois dérivable. Généraliser.

Exercice 5

1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que f' admet une limite finie en $+\infty$. Déterminer cette limite.
2. Soit f une fonction qui tend vers une limite finie en $+\infty$. Que dire de f' ?

Exercice 6 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f tend vers une même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 7 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f(a) = 0$ et $f(b) = f'(b) = ... = f^{(n-1)}(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.